پاسخ سوال ۱۲۷

$$Y(e^{jw}) = \int_{w-\frac{\pi}{4}}^{w+\frac{\pi}{4}} X(e^{j\lambda})d\lambda$$

با مشتق گرفتن از طرفین رابطه‌ی فوق داریم:

$$\frac{dY(e^{jw})}{dw} = X\left(e^{j(w+\frac{\pi}{4})}\right) - X\left(e^{j(w-\frac{\pi}{4})}\right)$$

با توجه به خاصیت مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس و جابه‌جایی فرکانسی می‌توان از تساوی فوق عکس تبدیل فوریه گرفت.

$$\frac{n}{j}y[n] = e^{-j\frac{\pi}{4}n}x[n] - e^{j\frac{\pi}{4}n}x[n] \Rightarrow y[n] = \frac{j}{n}\left(-2jsin\left(\frac{\pi}{4}n\right)x[n]\right)$$

$$\Longrightarrow y[n] = \frac{2}{n}sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)x[n]$$

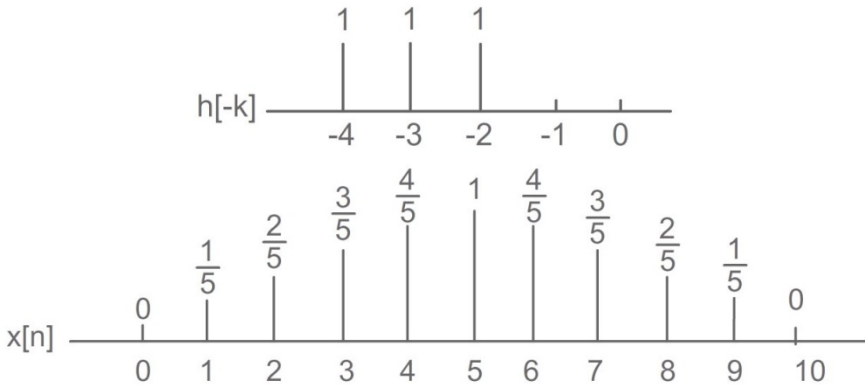
بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۲۸

خروجی یک سیستم خطی تغییر ناپذیر با زمان، برابر کانولوشن ورودی در پاسخ ضربه‌ی سیستم است.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

برای انجام عمل کانولوشن ابتدا سیگنال‌های $x[k]$ و $h[-k]$ را رسم می‌کنیم.



تخته سبز

برای مقادیر $n \geq 0$، $h[-k]$ را به اندازه‌ی n واحد به سمت راست و برای مقادیر $n < 0$، $h[-k]$ را به اندازه‌ی n واحد به سمت چپ شیفت می‌دهیم تا $h[n-k]$ به‌دست آید. با توجه به شکل‌های فوق هنگامی $y[n]$ ماکزیمم می‌شود که $h[-k]$ را به اندازه‌ای شیفت دهیم تا در بیش‌ترین مقادیر سیگنال $x[n]$ ضرب شود. بنابراین $y[n]$ به ازای $n = 8$ ماکزیمم می‌شود. با توجه به سیگنال $h[8-k]$ و رابطه‌ی کانولوشن داریم:

$$y[8] = 1 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{13}{5}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۲۹

در تحلیل سیستم‌ها با استفاده از سری فوریه رابطه‌ی زیر بین ورودی و خروجی برقرار است.

$$b_k = H\left(e^{jkw_0}\right)a_k$$

که در آن $w_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$ است. بنابراین:

$$b_k = cos^5(k\pi)a_k = (-1)^k a_k = e^{j\pi k}a_k$$

با توجه به رابطه‌ی فوق و خاصیت جابه‌جایی زمانی در می‌یابیم که b_k نشان دهنده‌ی ضرایب سری فوریه سیگنال $x[n-1]$ است. پس $y[n]$ برابر $x[n-1]$ است.

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۰

با توجه به معادله‌ی تفاضلی $H(z)$ را می‌توان به صورت زیر به‌دست آورد.

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

از علی بودن سیستم می‌توان دریافت که ناحیه‌ی همگرایی به صورت $|z| > \frac{1}{2}$ است. در سیستم‌های LTI سیگنال z_0^n یک تابع ویژه است. یعنی پاسخ به ورودی $x[n] = z_0^n$ به شرط آن‌که $|z_0|$ در ناحیه‌ی همگرایی باشد، برابر $y[n] = H(z_0)z_0^n$ است. بنابراین داریم:

$$x[n] = 2 + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n \Longrightarrow$$

$$y[n] = \frac{5}{2}H(1) + \frac{1}{2}(-1)^n H(-1) = 2(-1)^n$$

و در ادامه توان خروجی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$P_y = \frac{1}{N_0}\sum_{n:<N_0>} |x[n]|^2 = \frac{1}{2}(4+4) = 4$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۱

$$a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n:<N>} x[n]\, e^{jkw_0 n} \Longrightarrow a_{k+\frac{N}{2}} = \frac{1}{N_0}\sum_{n:<N>} x[n]\, e^{j\left(k+\frac{N}{2}\right)w_0 n}$$

$$\Longrightarrow a_{k+\frac{N}{2}} = \frac{1}{N_0}\sum_{n:<N>} (-1)^n x[n]\, e^{jkw_0 n}$$

با توجه به $a_k = a_{k+\frac{N}{2}}$ و رابطه‌ی فوق داریم:

$$x[n] = (-1)^n x[n]$$

رابطه‌ی فوق نشان می‌دهد که $x[n]$ برای مقادیر فرد n صفر است. در نتیجه سیگنال $x[2n+1] = 0$ است.

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۲

در تحلیل سیستم‌ها با استفاده از سری فوریه رابطه‌ی زیر بین ورودی و خروجی برقرار است.

$$b_k = H(jkw_0)a_k \qquad , w_0 = \frac{\pi}{3}$$

که در آن:

$$H(jw)=\begin{cases}1 & |w|<\frac{\pi}{2}\\ 0 & |w|>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

با توجه به فرکانس مرکزی و $H(jw)$ تنها نیاز به محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه a_{-1}، a_0 و a_1 از سیگنال $x(t)$ است.

$$a_k=\frac{1}{6}\left(\int_{-2}^{-1}e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt-\int_{1}^{2}e^{-jk\frac{\pi}{3}t}dt\right)\Rightarrow a_{-1}=b_{-1}=\frac{-j}{\pi},a_0=b_0=0,a_1$$
$$=b_1=\frac{j}{\pi}$$

با استفاده از ضرایب سری فوریه (b_k)، می‌توان سیگنال خروجی را محاسبه نمود.

$$y(t)=\frac{-j}{\pi}e^{-j\frac{\pi}{3}t}+\frac{j}{\pi}e^{j\frac{\pi}{3}t}=\frac{-2}{\pi}sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۳

با توجه به رابطه‌ی ضرایب سری فوریه، اگر ضرایب سری فوریه $x(t)$ موهومی و زوج باشد، آن‌گاه $x(t)$ نیز موهومی و زوج است. بنابراین مشتق سیگنال $x(t)$ فرد است.

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۴

با توجه به نوع سیگنال‌ها و این‌که فقط سیگنال خروجی در یک نقطه خواسته شده است از کانولوشن استفاده می‌کنیم. در ضمن با کمی دقت واضح است که سیگنال $h(t)$ برابر سیگنال $x(t)$ است. پس داریم:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)x(\tau)d\tau\Rightarrow y(6)=\int_{1}^{5}cos^2(100\pi\tau)d\tau=2$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

تخته سبز

پاسخ سوال ۱۳۵

برای محاسبه‌ی $x_1(t)$ از رابطه‌ی تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم.

$$x_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(jw)e^{jwt}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-3\pi}^{0} -3we^{-j\frac{\pi}{2}}e^{jwt}dw + \int_{0}^{3\pi} 3we^{j\frac{\pi}{2}}e^{jwt}dw\right)$$

با کمی محاسبات $x_1(t)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$x_1(t) = \frac{3}{\pi t^2}(3\pi t\, cos(3\pi t) - \sin(3\pi t))$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۶

با توجه به رابطه‌ی تبدیل فوریه داریم:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-jw\tau}d\tau \Longrightarrow X(t-3) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(t-3)\tau}d\tau$$

بنابراین $y(t)$ به صورت زیر است:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j(t-3)\tau}d\tau$$

با توجه به بازه‌ی انتگرال‌گیری $x(t)$، سیستم غیرعلی و حافظه‌دار است. هم‌چنین چون انتگرال‌گیری یک عملگر خطی است پس خطی نیز است. اما جمله‌ی $e^{-j(t-3)\tau}$ سبب تغییر پذیری سیستم شده است.

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۷

مشابه با سوال ۶ داریم:

$$b_k = H(jkw_0)a_k \quad ,w_0 = \frac{\pi}{2} \qquad b_k = \frac{2\sin(k\pi)}{k\pi}a_k$$

با توجه به رابطه‌ی فوق مشخص است که همه‌ی ضرایب b_k به جز b_0 صفر است. بنابراین:

$$y(t) = b_0 = 2a_0 = 2\times\frac{1}{4}\int_{-3}^{1} x(t)dt = \frac{1}{2}\times\frac{11}{6} = \frac{11}{12}$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

پاسخ سوال ۱۳۸

سیستم به علت وجود $Re\{\}$ غیرخطی است. برای مثال اگر ورودی حقیقی باشد و در یک عدد موهومی ضرب شود، خروجی صفر شده و در آن عدد ضرب نمی‌شود. اگر رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد و شروط تابعی از زمان باشد، سیستم تغییر پذیر با زمان می‌شود.

بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

تخته سبز